DOCUMENT RESUME

ED 066 970 FL 003 391

AUTHOR [Parot, Jean Jacques]
TITLE Actualizacion Matematica, AM-2 (Modernizing Mathematics, AM-2).
INSTITUTION Ministerio de Educacion Nacional, Bogota (Colombia). Instituto Colombiano de Pedagogia.
REPORT NO ICOLPE-6-IE5-II-71
PUB DATE 71
NOTE 61p.

EDRS PRICE MF-$0.65 HC-$3.29
DESCRIPTORS Classroom Techniques; Educational Games; *Elementary School Mathematics; *Instructional Materials; International Education; *Logic; Number Concepts; Numbers; *Primary Grades; Spanish Speaking; Teacher Education; *Teaching Methods; Whole Numbers

ABSTRACT

This document presents a series of exercises designed to help elementary school children develop skills in mathematics and logic. By means of stories, games, questions, and illustrations, the first set of exercises presents the idea of number systems with bases other than 10. Similar means are used to explain the concept of exponents and to teach the children certain logical relationships. For report AM-1, see FL 003 289. (VM)

1

Ministerio de Educación Nacional
Universidad Pedagógica Nacional

icolpe INSTITUTO COLOMBIANO DE PEDAGOGIA

DOCUMENTO ICOLPE
6/IE5/11 71
CIRCULACION GENERAL

ACTUALIZACION MATEMATICA

icolpe INSTITUTO COLOMBIANO DE PEDAGOGIA

ED 066 ...

DOCUMENTO ICOLPE
6/IE5/II 71
CIRCULACION GENERAL

ACTUALIZACION MATEMATICA

AM-2

BOGOTA, D.E. COLOMBIA

2

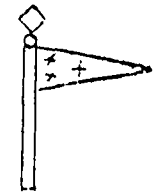
A C T U A L I Z A C I O N   M A T E M A T I C A

Al plantear en nuestro primer fascículo la necesidad de una actualización matemática en los maestros de enseñanza primaria y los aportes que haremos a ella, sugiriendo los posibles cambios en la técnica de la enseñanza de las matemáticas principalmente en lo concerniente a los primeros años de la escuela, queremos a lo largo de nuestra obra introducir una serie de ejercicios capaces de guiar a los niños en el desarrollo lógico -matemático sea el caso de los conceptos relacionados con la idea de número.

Es fácil reconocer que el estudio de la teoría de conjuntos nos lleva a hacer consideraciones de orden lógico por lo cual debemos pretender, al enseñar las matemáticas, buscar el desarrollo de las facultades necesarias al alumno en el mañana. Precisamente, uno de los medios dentro de los muchos propuestos se fundamenta en la variabilidad de experiencias concretas y distintas sobre las cuales pueden efectuarse tareas matemáticas equivalentes.

Así por ejemplo el jugar en distintas bases permite abstraer el concepto de valor de posición con mayor facilidad que cuando se aprende exclusivamente en base 10, de este modo los números surgen como propiedades relativas a conjuntos de objetos que permiten abstraerse.

LA NUMERACION EN DISTINTAS BASES

Nos encontramos en un país que llamaremos el "país de tres" cuya bandera  vemos acá.

A los niños de este país les gusta jugar, formando conjuntos de tres elementos. Por ejemplo hacen rondas de la manera siguiente: Cuando uno da la señal se agrupan en rondas de tres (decimos que esas rondas son pequeñas)

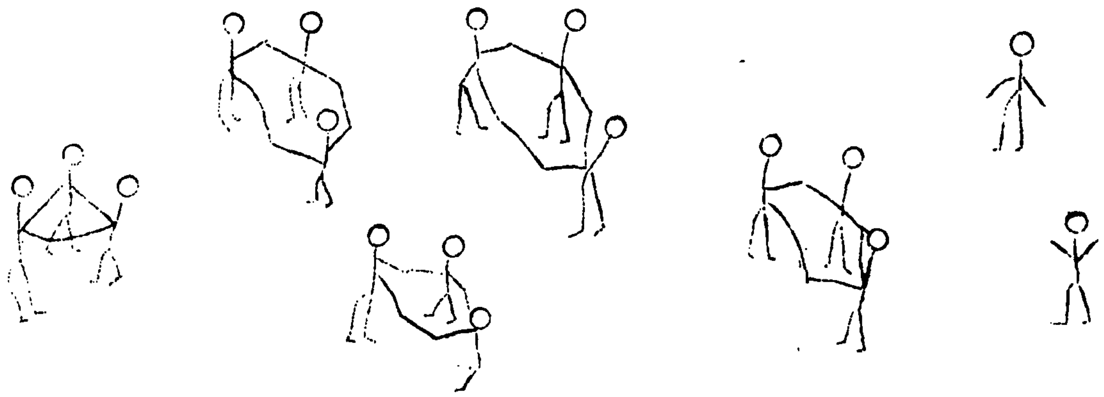


Figura 1

Puede ocurrir que uno o dos niños queden fuera de las rondas. Obteniéndose, al representar en el tablero la siguiente situación

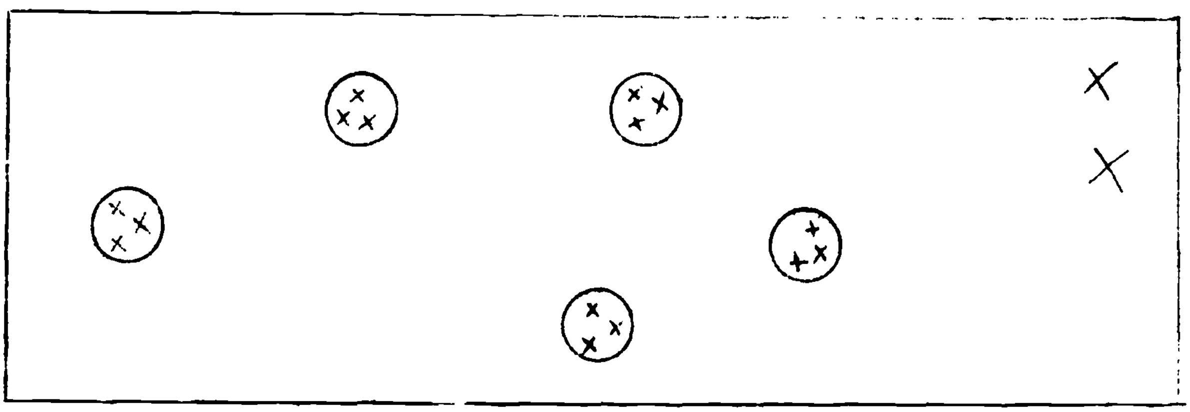


Figura 2

Después de otra señal, tres rondas pequeñas se agrupan para formar una ronda mediana; lo que se obtiene entonces puede ser representado por:

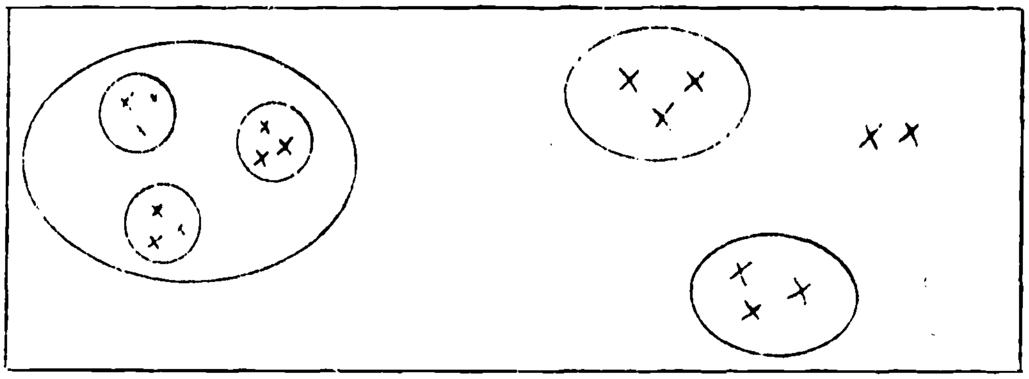


Figura 3

Si hay tres rondas medianas, se agruparán tres de ellas para formar una ronda grande.

El profesor les hace separar y agrupar de nuevo totalmente, escogiendo otros amigos para formar rondas pequeñas; así se darán cuenta que la representación es siempre la misma, aunque cambien de posición los niños que forman las rondas pequeñas de tres.

Pero si se incluye el profesor en las rondas, cambia la representación inicial. Al unirse con los dos alumnos que sobraban, forman una ronda mediana y se obtiene el gráfico mostrado en la Figura 4.

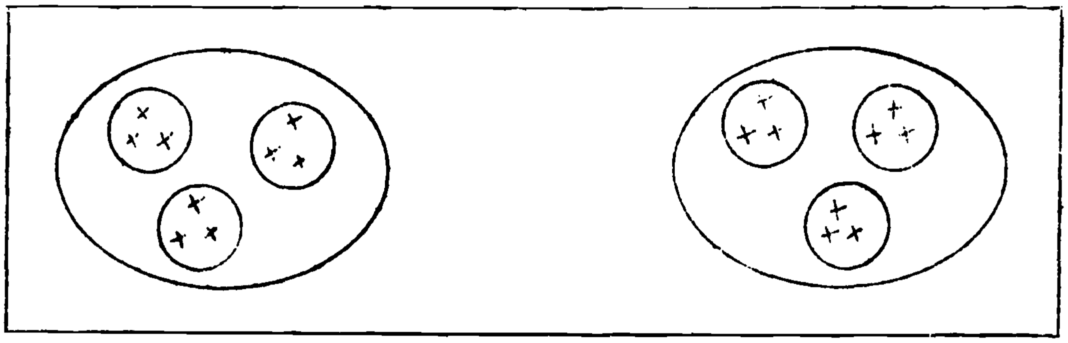


Figura 4

Un alumno se dió cuenta que para recordar era suficiente anotar el número de rondas de cada tipo, así:

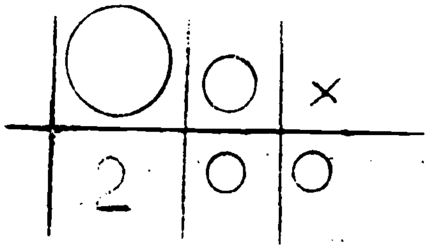


Figura 5

Y, haciendo la convención de anotar primero las rondas más grandes, es suficiente escribir 200 (que se lee dos, cero, cero).

Este juego se puede realizar con materiales diferentes, por ejemplo con piedras, en el suelo

Un alumno se dió cuenta que para recordar era suficiente anotar el número de rondas de cada tipo, así:

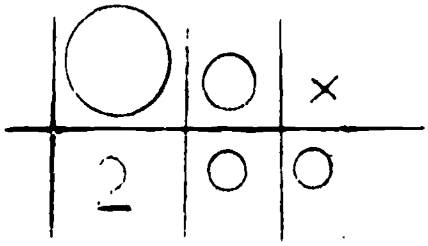


Figura 5

--. Y, haciendo la convención de anotar primero las rondas más grandes, es suficiente escribir 200 (que se lee dos, cero, cero).

Este juego se puede realizar con materiales diferentes, por ejemplo con piedras, en el suelo

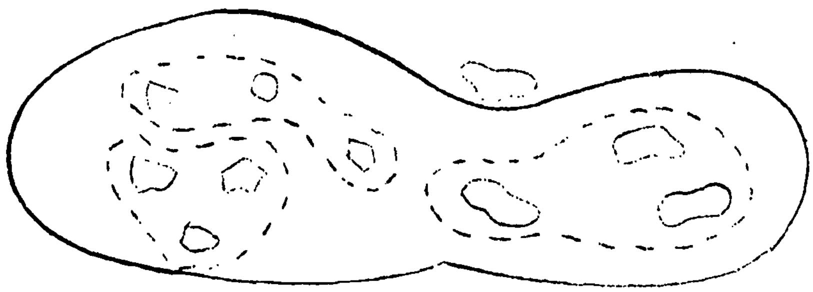


Figura 6

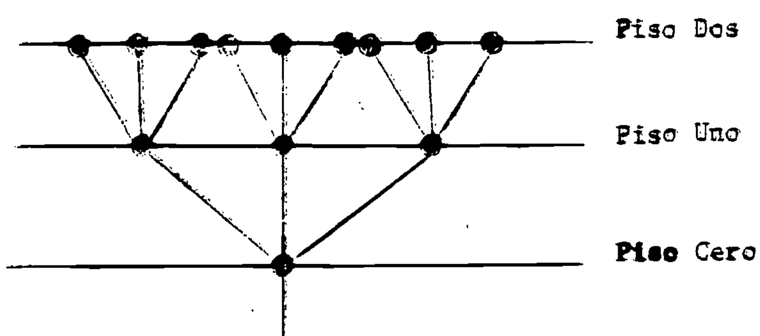
Encerrando en una casa pequeña un conjunto de tres piedras, después se encierran en una casa mediana tres casas pequeñas, y así sucesivamente.

En otra escuela tienen la suerte de disponer de ladrillos de "extralandia". Con tres ladrillos forman una torre pequeña, con tres torres pequeñas forman una torre mediana, con tres torres medianas una grande, etc.

En otra escuela empacan fósforos de la manera siguiente: cuando

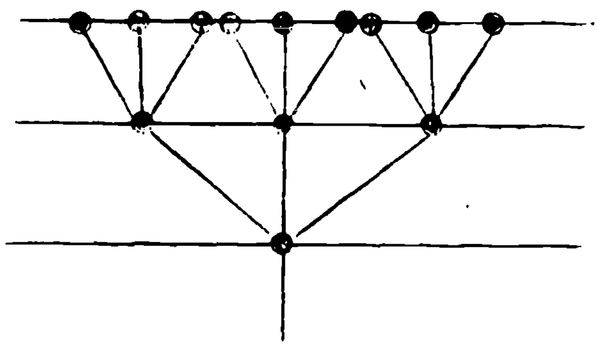
tienen tres fósforos los colocan en una caja de fósforos, cuando tienen tres cajas de fósforos (con elementos) colocan esas tres en una caja de cigarrillos, cuando tienen tres cajas de cigarrillos, cada una con sus tres cajas de fósforos colocan esas cajas de cigarrillos en una caja más grande, etc.

Otros dibujan árboles con varios pisos. En cada piso una rama se parte en tres.

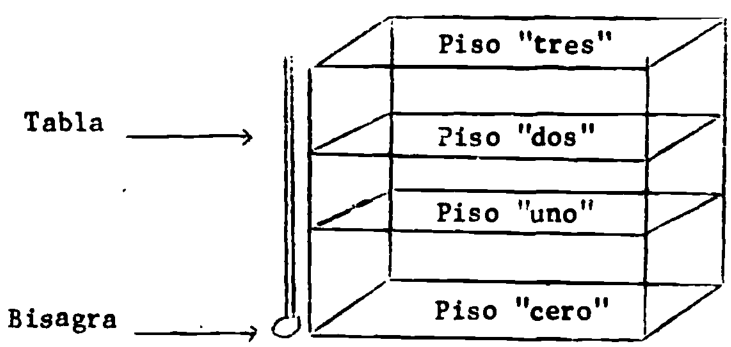


tienen tres fósforos los colocan en una caja de fósforos, cuando tienen tres cajas de fósforos (con elementos) colocan esas tres en una caja de cigarrillos, cuando tienen tres cajas de cigarrillos, cada una con sus tres cajas de fósforos colocan esas cajas de cigarrillos en una caja más grande, etc.

Otros dibujan árboles con varios pisos. En cada piso una rama se parte en tres.



En otra escuela del "país de tres" usan un CONTADOR que se presenta como un estante al cual está fijada una tabla que gira alrededor de una bisagra. Disponen también de cajitas de plástico transparente.



Para encontrar el número de elementos de un conjunto proceden de la siguiente manera: Depositan un elemento del conjunto en una caja de plástico que colocan en el piso "cero". Si efectúan esta acción tres veces en tal forma que cuando hay tres cajas (que tienen cada una su

elemento) en el piso cero, sacan las tres cajas del contador y ponen el contenido de ellas en una sola, que colocan en el piso superior, es decir, el piso "uno". Continúan echando un elemento en una caja que se coloca en el piso "cero" hasta tener tres cajas, momento en el cual se repite lo anterior. De una manera general, cuando llegan a tener tres cajas con elementos en el piso "n" sacan esas tres cajas del contador y depositan el contenido de ellas en una sola que colocan en el piso "n + 1". Se podría colocar otro contador sobre el primero si ese no tiene un número suficiente de pisos. El proceso se detiene cuando todos los elementos de nuestro conjunto hayan sido colocados en las cajas del contador.

elemento) en el piso cero, sacan las tres cajas del contador y ponen el contenido de ellas en una sola, que colocan en el piso superior, es decir, el piso "uno". Continúan echando un elemento en una caja que se coloca en el piso "cero" hasta tener tres cajas, momento en el cual se repite lo anterior. De una manera general, cuando llegan a tener tres cajas con elementos en el piso "n" sacan esas tres cajas del contador y depositan el contenido de ellas en una sola que colocan en el piso "n + 1". Se podría colocar otro contador sobre el primero si ese no tiene un número suficiente de pisos. El proceso se detiene cuando todos los elementos de nuestro conjunto hayan sido colocados en las cajas del contador.

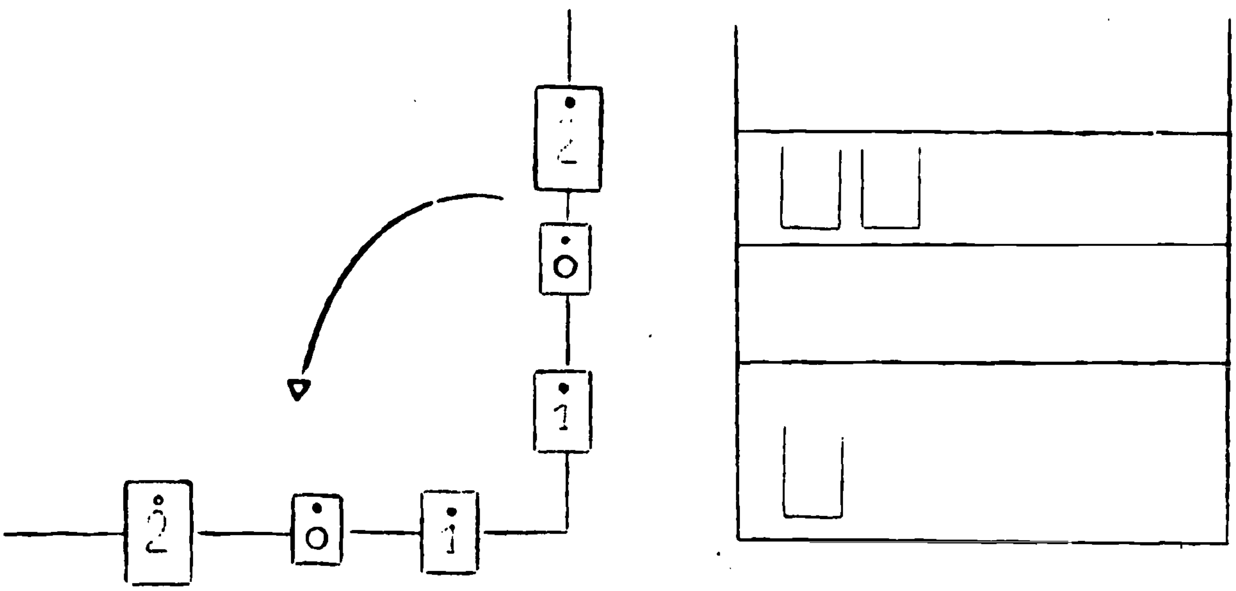


Figura 9

Supongamos que tenemos la situación correspondiente al esquema presentado en la Figura 9.

Si sobre la plancha que gira, y en cada piso, colocamos una etiqueta sobre la cual hemos escrito el número de cajas que hay en el piso

correspondiente obtenemos para nuestro ejemplo $\begin{matrix}2\\0\\1\end{matrix}$ y para notar el número de elementos, siguiendo la escritura convencional, bastará con que hagamos girar la tabla ; así tendremos entonces 201 que es el cardinal o número de elementos del conjunto considerado inicialmente.
OJO! 201 en el "país de tres" no se lee doscientos uno, sino DOS CERO UNO.

Para escribir la lista de números en el "país de tres", los alumnos utilizan el contador, colocan un elemento en el aparato y escriben el número correspondiente; continuando el proceso como se dijo anteriormente.

Obtienen una lista cuyo principio es: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102.

NOTA: Esta lista debe el lector encontrarla por sí mismo.

Hay un juego con dados que le gusta a los niños: se juega por grupos de cuatro, un alumno desempeña el papel de Banco y es él quien dispone de billetes

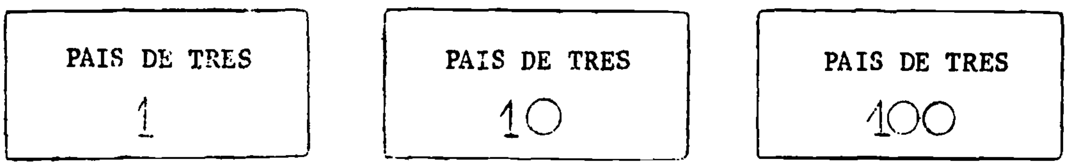


Figura 10

Un alumno coge un dado y lo lanza:

Si sale,  dice 12 (se lee uno dos) y el banquero debe darle la suma correspondiente o sea un billete de 10 y dos de 1.

Cuando tiene tres billetes del mismo valor debe cambiarlos por otro. Cada alumno juega a su turno. Gana el alumno que, al fin del período, tiene más plata.

<u>Problema</u>: Si un alumno juega seis veces y saca una vez cada número cuánto tendría? Esto en el "país de tres".

Otro juego bastante interesante es el siguiente: Se dibuja en el suelo una figura como la de la gráfica 11

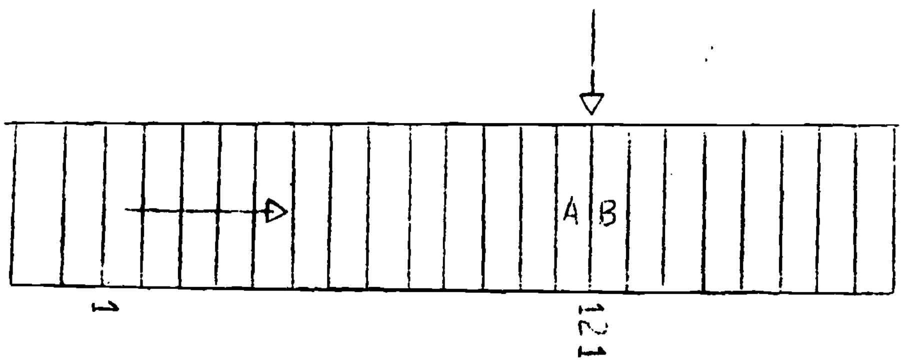


Figura 11

Cuando tiene tres billetes del mismo valor debe cambiarlos por otro. Cada alumno juega a su turno. Gana el alumno que, al fin del período, tiene más plata.

Problema: Si un alumno juega seis veces y saca una vez cada número cuánto tendría? Esto en el "país de tres".

Otro juego bastante interesante es el siguiente: Se dibuja en el suelo una figura como la de la gráfica 11

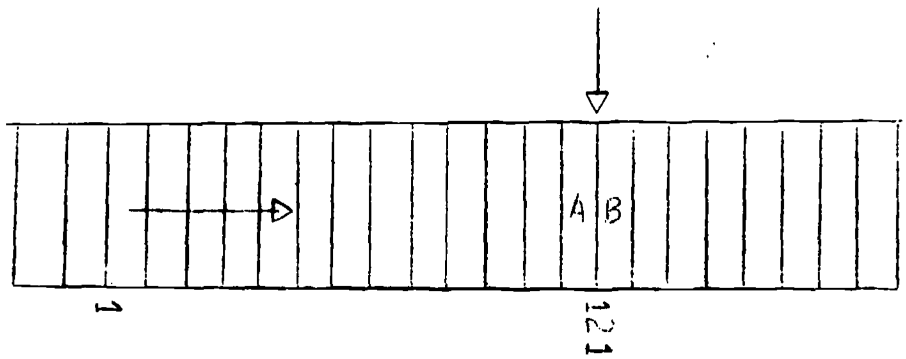
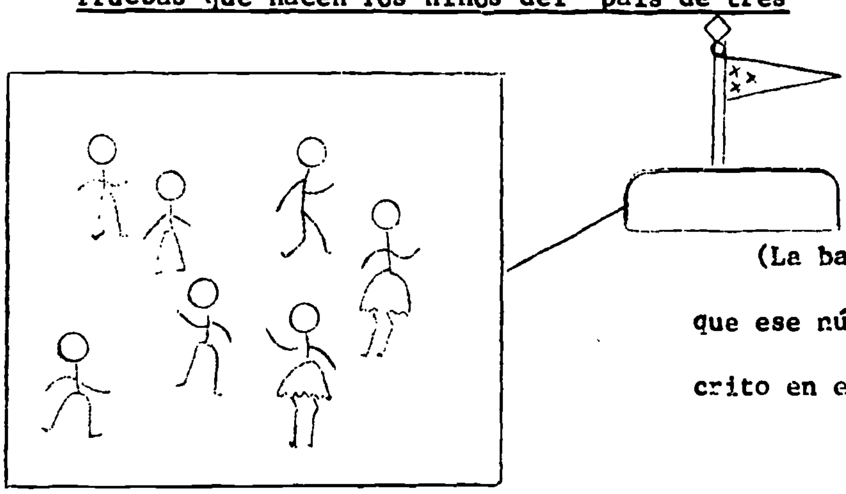


Figura 11

Para pasar de una casita a la siguiente como lo indica el dibujo, el alumno debe decir el número correcto. Por ejemplo, para pasar de la "Casa A" a la "Casa B" el niño debe decir 121. Gana quien llegue más lejos.

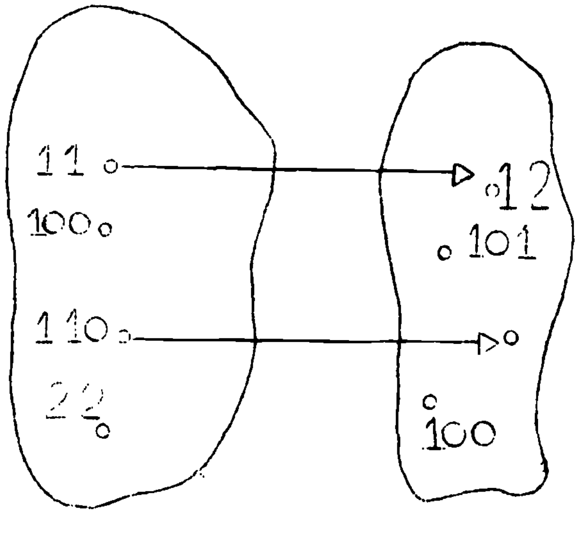
Pruebas que hacen los niños del "país de tres"



Escribir el número de elementos. (La bandera indica que ese número debe ser escrito en el "país de tres").

Figura 12

Completar

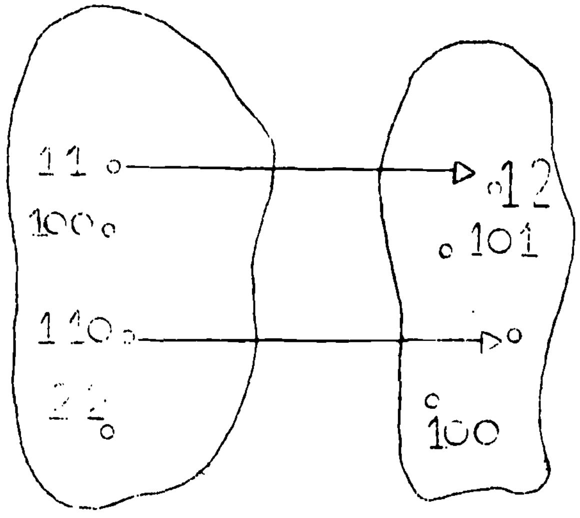


La flecha significa:
"es inmediatamente anterior a".
Se pueden hacer también esquemas que corresponden a la relación "es inmediatamente posterior a".

Figura 13

Ahora se plantea otro problema: Si Juan dice a Pedro "te presté 21 bolitas, debes devolvérmelas". Pedro tiene que hallar un conjunto conociendo su cardinal. Cómo hace? Claro está, si conoce perfectamente la lista de los números los podrá contar 1, 2, 10, 11, hasta que llegue a 21, pero si no conoce bien esa lista las colocará una por una en el contador, indicando cada vez el número de elementos que se encuen

Completar



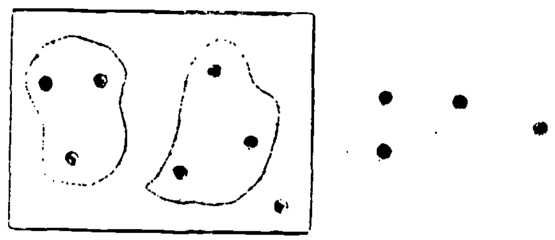
La flecha significa:

"es inmediatamente anterior a".

Se pueden hacer también esquemas que corresponden a la relación "es inmediatamente posterior a".

Figura 13

Ahora se plantea otro problema: Si Juan dice a Pedro "te presté 21 bolitas, debes devolvérmelas". Pedro tiene que hallar un conjunto conociendo su cardinal. Cómo hace? Claro está, si conoce perfectamente la lista de los números los podrá contar 1, 2, 10, 11, hasta que llegue a 21, pero si no conoce bien esa lista las colocará una por una en el contador, indicando cada vez el número de elementos que se encuentran en el aparato hasta llegar a 21, o también puede colocar sus bolitas en el suelo y hacer rondas.



<u>Prueba</u>: Dibujar los elementos del gráfico cuyo cardinal es 101

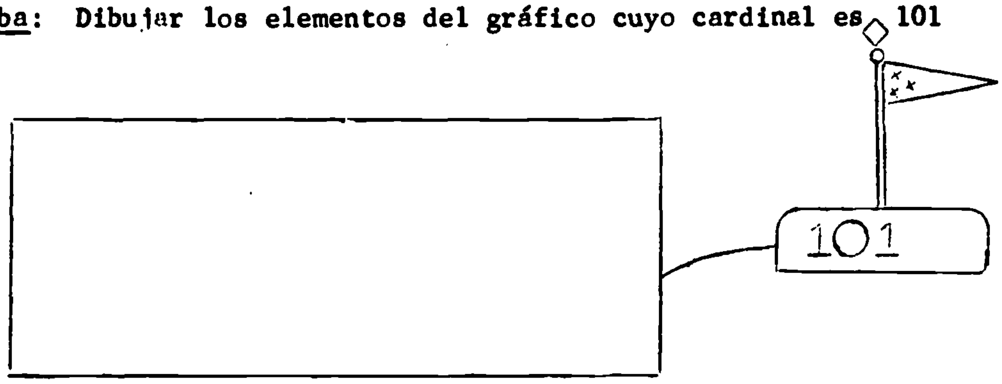
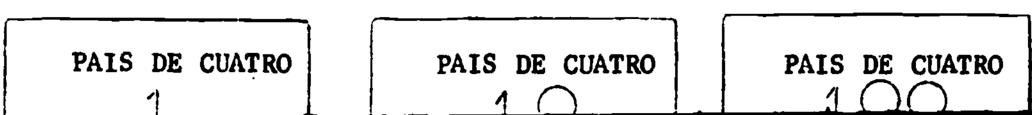


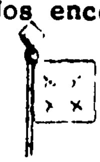
Figura 14

Nos encontramos ahora en el "país de cuatro" cuya bandera sería:  Cuál será la diferencia con el "país de tres"? Sencillamente diríamos: En lugar de hacer las agrupaciones en tres, se hacen en cuatro; en esta forma podemos practicar los mismos juegos así: en vez de hacer rondas de tres se hacen rondas de cuatro, etc.

Usando el contador, cuando hay cuatro cajitas con elementos en un piso n se deposita el contenido de esas cuatro cajas en una sola y se coloca en el piso $n + 1$. El principio de la lista de números en base cuatro es: 0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103.

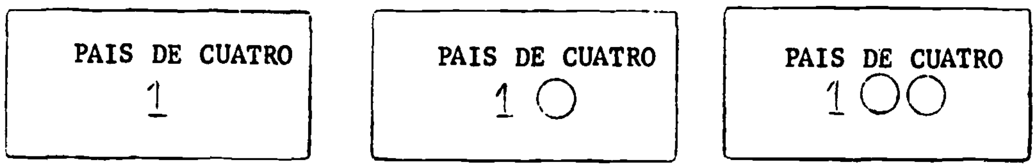
Los billetes que circulan en el "país de cuatro" son:



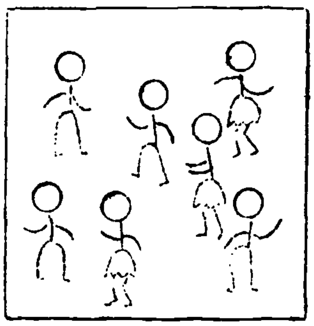
Nos encontramos ahora en el "país de cuatro" cuya bandera sería:  Cuál será la diferencia con el "país de tres"? Sencillamente diríamos: En lugar de hacer las agrupaciones en tres, se hacen en cuatro; en esta forma podemos practicar los mismos juegos así: en vez de hacer rondas de tres se hacen rondas de cuatro, etc.

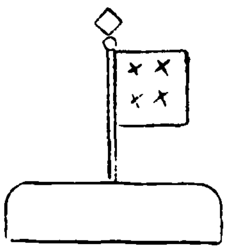
Usando el contador, cuando hay cuatro cajitas con elementos en un piso n se deposita el contenido de esas cuatro cajas en una sola y se coloca en el piso $n + 1$. El principio de la lista de números en base cuatro es: 0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103.

Los billetes que circulan en el "país de cuatro" son:

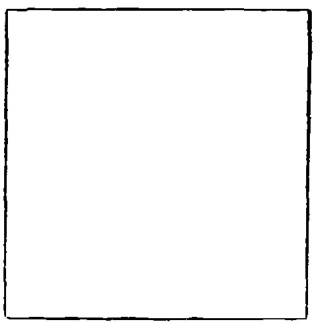


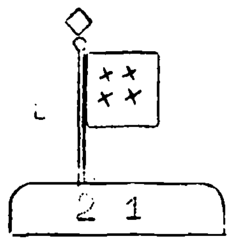
Pruebas:



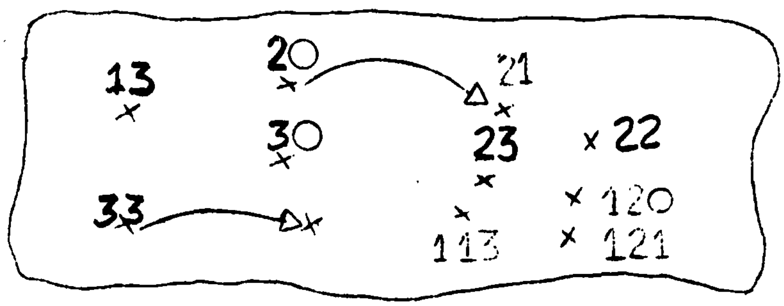


Escribir el número de elementos de este conjunto.





Dibuje los elementos del gráfico cuyo cardinal es 21.



Complete las flechas de este cuadro si cada una significa "... es seguido por..."

Figura 15

Problemas de Fronteras.

Los países "de tres" y "de cuatro" son vecinos, sus habitantes viajan a menudo de un país al otro. En cada país no se permite que la gente lleve dinero del otro, de tal manera que cuando uno llega a la frontera debe ir al banco para cambiar su plata, pero allí por un billete de 1 de un país se dá un billete de 1 de cualquier otro.

Problema: Un señor del "país de tres" se presenta al Banco con dos billetes de 100 y un billete de 10. Qué billetes del "país de cuatro va a recibir? La manera más sencilla de proceder consiste en cambiar los billetes de 100 y de 10 por billetes de 1 del mismo país y después cambiar los billetes de 1 por billetes de 1 del otro país,

Problemas de Fronteras.

Los países "de tres" y "de cuatro" son vecinos, sus habitantes viajan a menudo de un país al otro. En cada país no se permite que la gente lleve dinero del otro, de tal manera que cuando uno llega a la frontera debe ir al banco para cambiar su plata, pero allí por un billete de 1 de un país se dá un billete de 1 de cualquier otro.

Problema: Un señor del "país de tres" se presenta al Banco con dos billetes de 100 y un billete de 10. Qué billetes del "país de cuatro va a recibir? La manera más sencilla de proceder consiste en cambiar los billetes de 100 y de 10 por billetes de 1 del mismo país y después cambiar los billetes de 1 por billetes de 1 del otro país, y por fin cambiar los billetes de 1 por otros de 10 o de 100.

Existen, para resolver, otros problemas similares: Unas personas se trasladan del"país de cuatro" en barco al "país de tres"

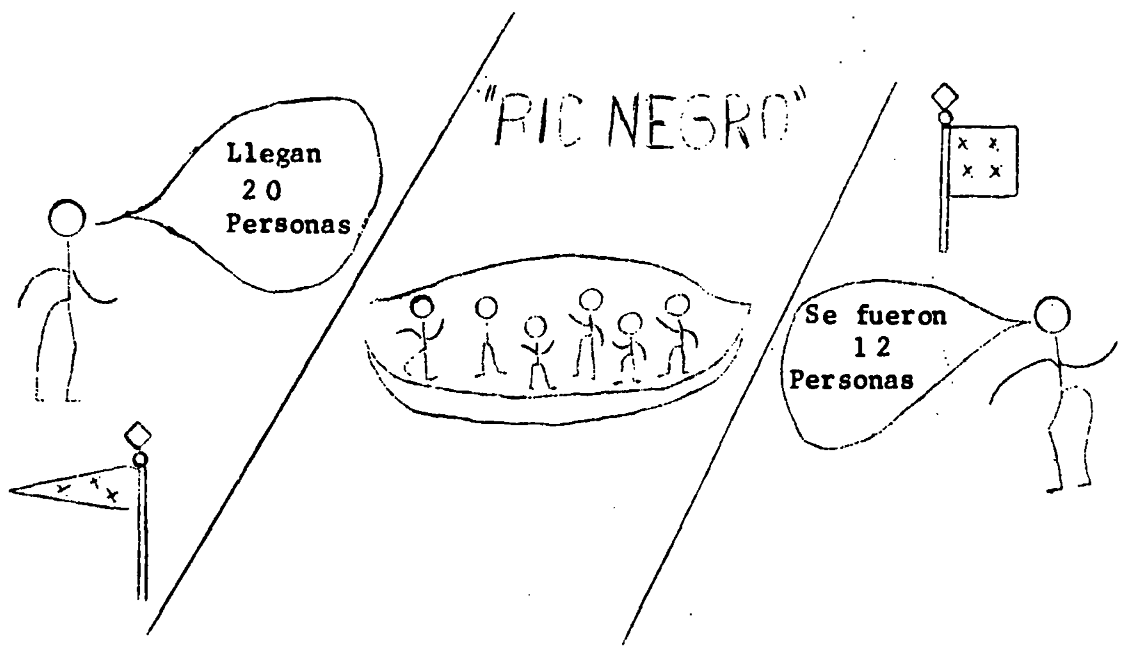
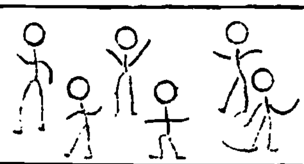


Figura 16

Si una persona del "país de cuatro" dice: "se van 1 2 personas" una persona del "país de tres" dirá "llegan 2 0 personas".

Si una persona del país de tres dice: "se van 2 2 0 personas" la del"país de cuatro" tendrá que decir: "llegan - - - personas".

PAIS DE TRES	CONJUNTO DE LAS PERSONAS QUE SE ENCUENTRAN EN EL BARCO	PAIS DE CUATRO
		
10		
		10

Si una persona del "país de cuatro" dice: "se van 1 2 personas" una persona del "país de tres" dirá "llegan 2 0 personas".

Si una persona del país de tres dice: "se van 2 2 0 personas" la del"país de cuatro" tendrá que decir: "llegan - - - personas".

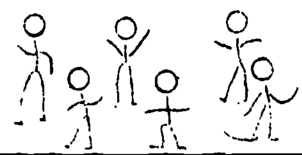
PAIS DE TRES	CONJUNTO DE LAS PERSONAS QUE SE ENCUENTRAN EN EL BARCO	PAIS DE CUATRO
		
10		
		10

Figura 17

Veamos qué sucede en el "país de dos". En este país no usan sino dos símbolos para escribir los números, ellos son el símbolo 0 y el símbolo 1. Los niños de ese país conocen muy bien el juego siguiente, efectuándolo para determinar el número de elementos de un conjunto de objetos; los alumnos se ponen en fila con las manos abajo, frente al conjunto

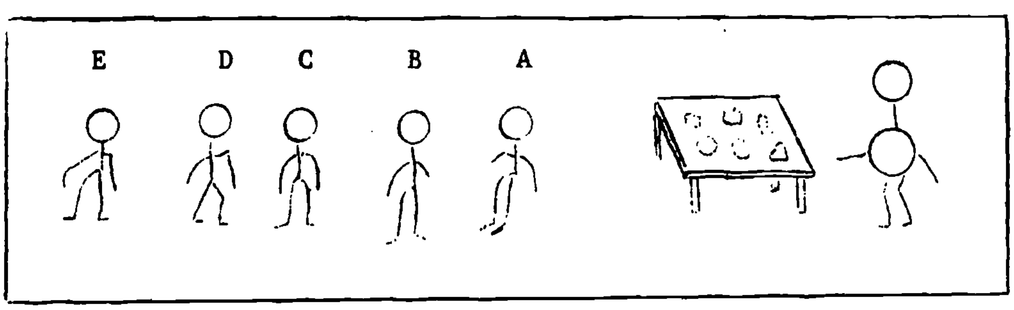


Figura 18

Cuando el profesor deja caer un elemento, el alumno "A" levanta una mano, encontrándose en la siguiente situación:

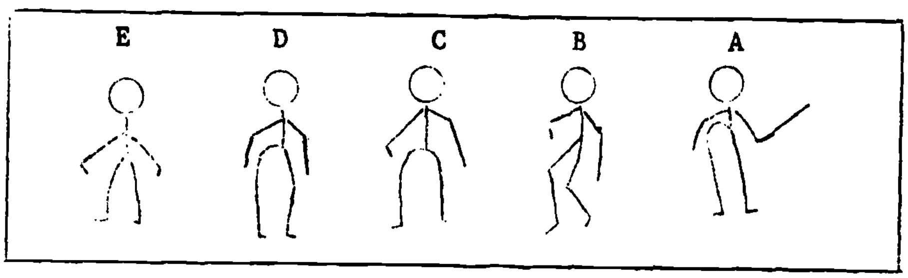
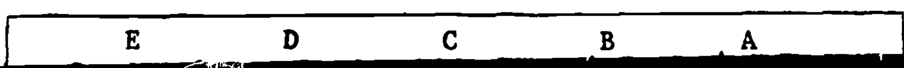


Figura 19

Al caer otro elemento del conjunto; cada niño "A" baja la mano - pero B al notar esto, sube la suya, de tal manera obtenemos esta grá fica



Cuando el profesor deja caer un elemento, el alumno "A" levanta una mano, encontrándose en la siguiente situación:

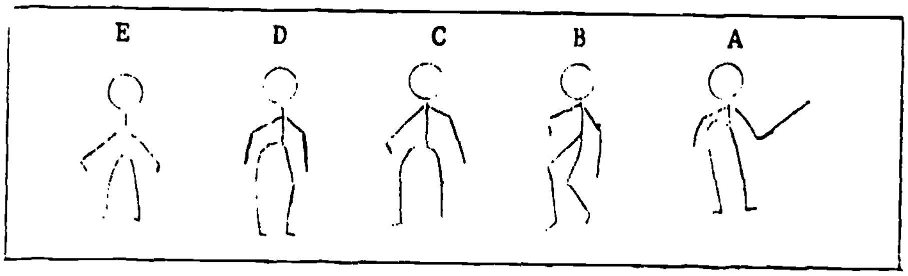


Figura 19

Al caer otro elemento del conjunto; cada niño "A" baja la mano - pero B al notar esto, sube la suya, de tal manera obtenemos esta grá fica

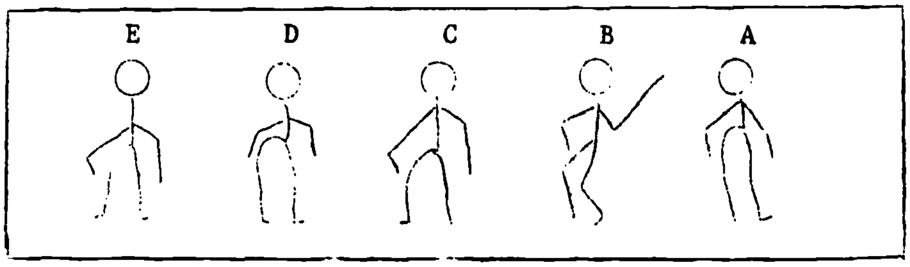


Figura 20

Cae otro elemento, entonces A levanta nuevamente la mano

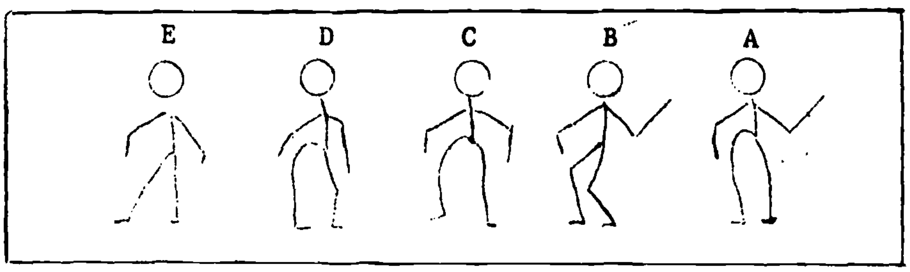


Figura 21

Si cae otro elemento, "A" cambia de posición su mano (la baja) y "B" quien la tenía levantada la baja, pero "C" al notar que "B" baja la mano, levanta la suya. De tal manera obtenemos la gráfica 22, habiendo caído cuatro objetos

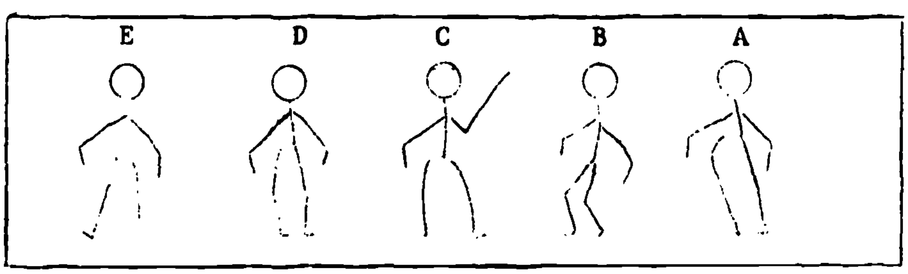
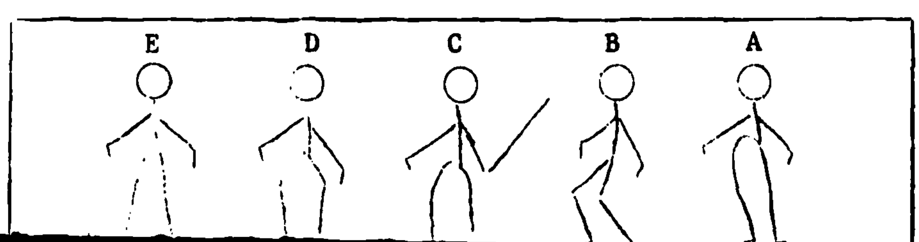


Figura 22

La situación obtenida al caer nuevamente otro elemento del conjunto sería



Si cae otro elemento, "A" cambia de posición su mano (la baja) y "B" quien la tenía levantada la baja, pero "C" al notar que "B" baja la mano, levanta la suya. De tal manera obtenemos la gráfica 22, habiendo caído cuatro objetos

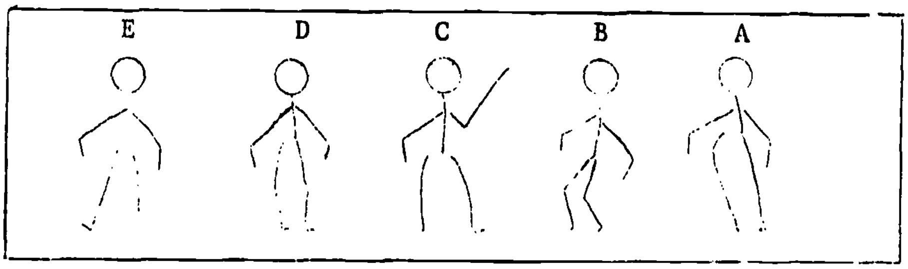


Figura 22

La situación obtenida al caer nuevamente otro elemento del conjunto sería

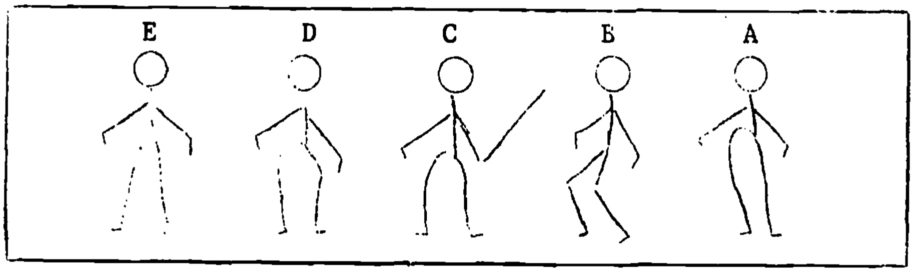


Figura 23

Supongamos que después de la caída del último elemento se obtiene esta gráfica

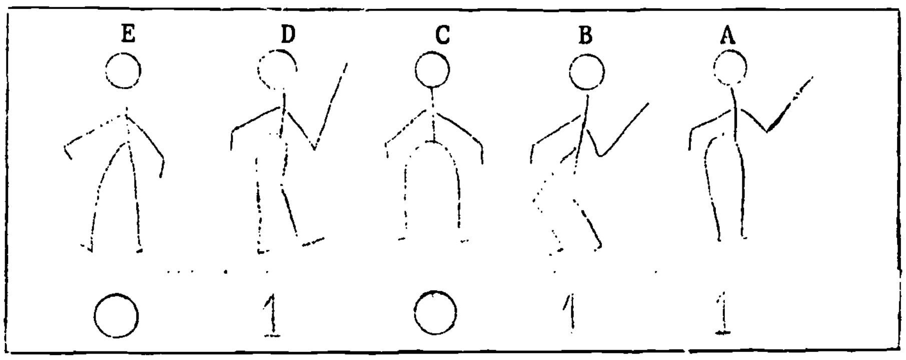


Figura 24

El profesor entonces dice: "una mano arriba corresponde a 1 y las manos abajo corresponde a 0" por consiguiente el cardinal del conjunto es 1 0 1 1 (Gráfica 24).

De esa manera se puede también escribir el principio de la lista de los números 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000 ...

Un juego similar se podría practicar en otro país: el "de tres" por ejemplo, pero habría tres posiciones posibles:

- las dos manos abajo (que corresponde al 0)
- una mano arriba (que corresponde al 1)
- dos manos arriba (que corresponde al 2)

La película del juego sería:

El profesor entonces dice: "una mano arriba corresponde a 1 y las manos abajo corresponde a 0" por consiguiente el cardinal del conjunto es 1 0 1 1 (Gráfica 24).

De esa manera se puede también escribir el principio de la lista de los números 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000 ...

Un juego similar se podría practicar en otro país: el "de tres" por ejemplo, pero habría tres posiciones posibles:

- las dos manos abajo (que corresponde al 0)
- una mano arriba (que corresponde al 1)
- dos manos arriba (que corresponde al 2)

La película del juego sería:

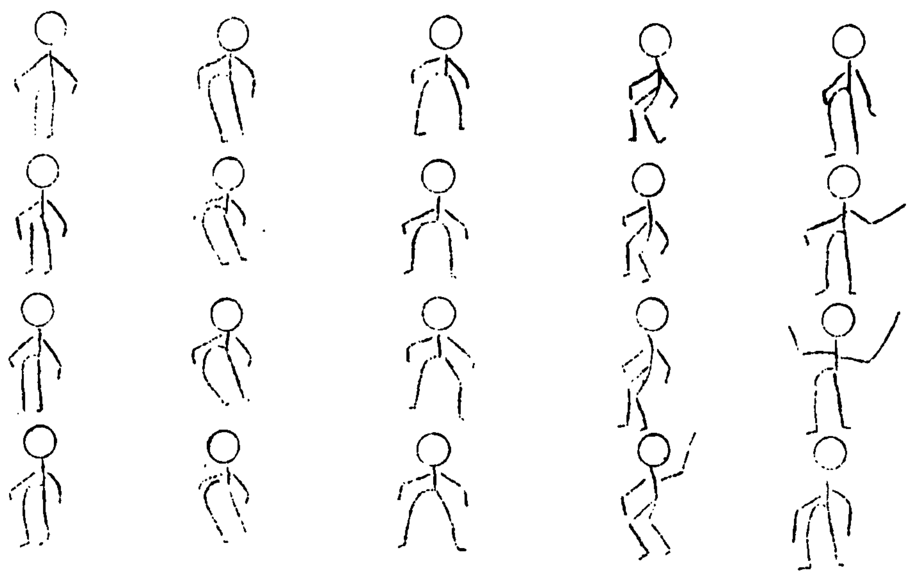
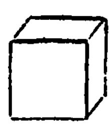


Figura 26

es decir, que esta vez, "B" cambia de posición de sus manos cuando "A" baja las dos manos. De la misma manera "C" cambia de posición cuando "B" baja las dos manos, etc.

En Colombia, en qué país estamos? El principio de la lista de los enteros se escribe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... se usan diez símbolos, en el contador se cambia de piso cuando hay diez cajas en un piso; entonces, estamos en el país de diez. En una escuela de Colombia los alumnos tienen un juego con los siguientes elementos de madera:

- cubitos 

- reglas formadas por diez cubos pegados

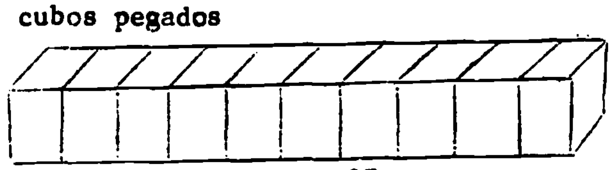
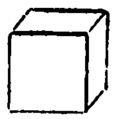


Figura 27

- placas que se obtienen

En Colombia, en qué país estamos? El principio de la lista de los enteros se escribe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... se usan diez símbolos, en el contador se cambia de piso cuando hay diez cajas en un piso; entonces, estamos en el país de diez. En una escuela de Colombia los alumnos tienen un juego con los siguientes elementos de madera:

- cubitos 

- reglas formadas por diez cubos pegados

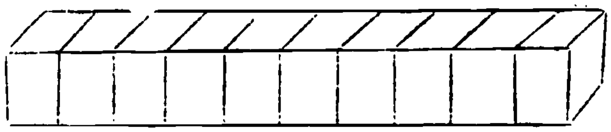


Figura 27

- placas que se obtienen pegando diez reglas (o cien cubos)

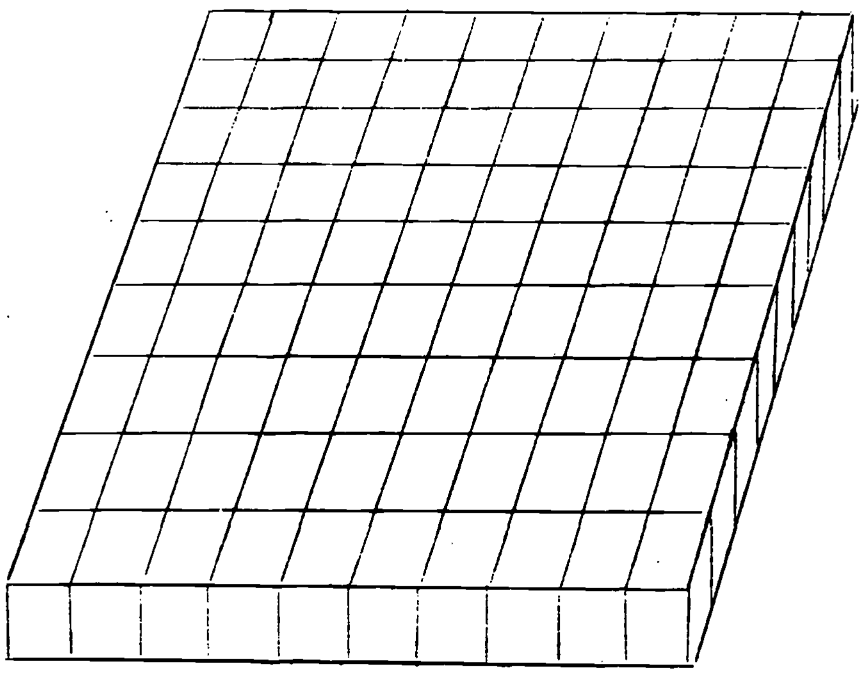


Figura 28

- cubos que se obtienen
  pegando 10 placas

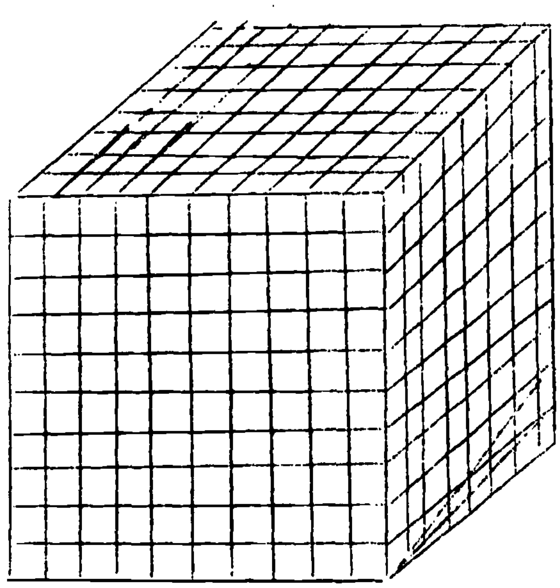


Figura 29

- cubos que se obtienen

pegando 10 placas

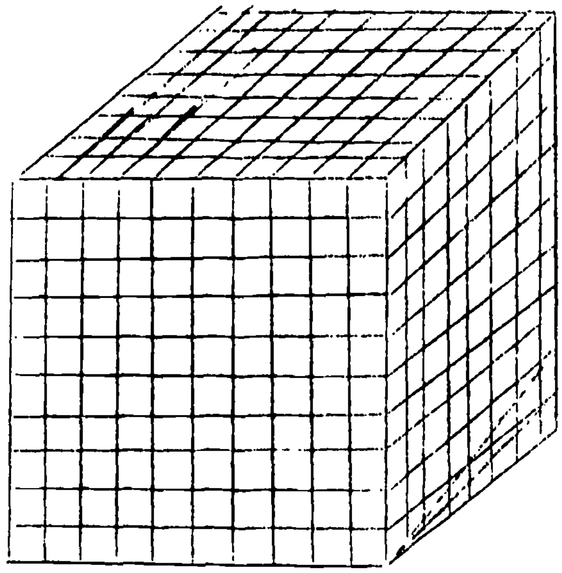


Figura 29

Para hallar el cardinal de un conjunto de cubitos, se cambian el mayor número posible de cubitos por reglas, después el mayor número posible de reglas por placas, siguiendo siempre la condición de cambio cual es la de dar: 10 cubitos por una regla

10 reglas por una placa

10 placas por un cubo

Vamos ahora al "país de doce", para escribir los número, en ese país usan los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y otros dos raros que reemplazaremos por a y b. El principio de la lista de los enteros en base, doce es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, 10, 11, 12, 13, - - 19, 1a, 1b, 20, 21, 22, ...

En ese país dicen: el número de meses por año es 10.

L A S P O T E N C I A S

Volvamos a considerar el aparato para la numeración.

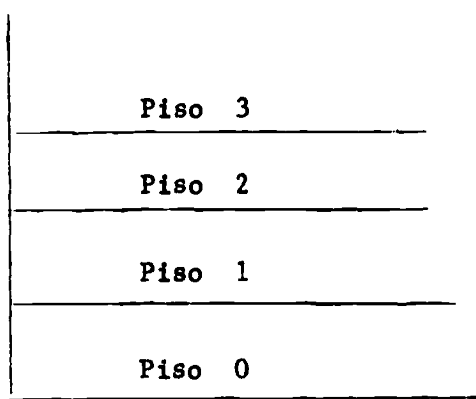


Figura 30

Qué tenemos dentro de una caja del piso 2 en el país del diez?

Para tener una caja en el piso uno, necesitamos 10 elementos y para tener una caja en el segundo piso necesitamos diez cajas de diez elementos, o sea en cada caja del segundo piso tenemos cien elementos. Si cien es 10^2, entonces podemos decir que 10^2 es el número de elementos que se encuentran en una caja del segundo piso en el país del diez.

Qué es 4^3? Es lo que hay en una caja del tercer piso en el "país de cuatro". Cuántos elementos tuvimos que subir del piso cero para obtener una caja del piso tercero?

Volvamos a considerar el aparato para la numeración.

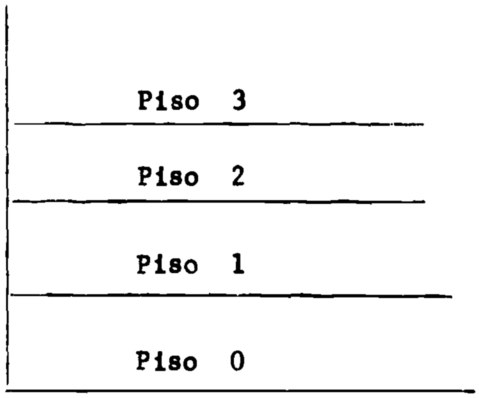
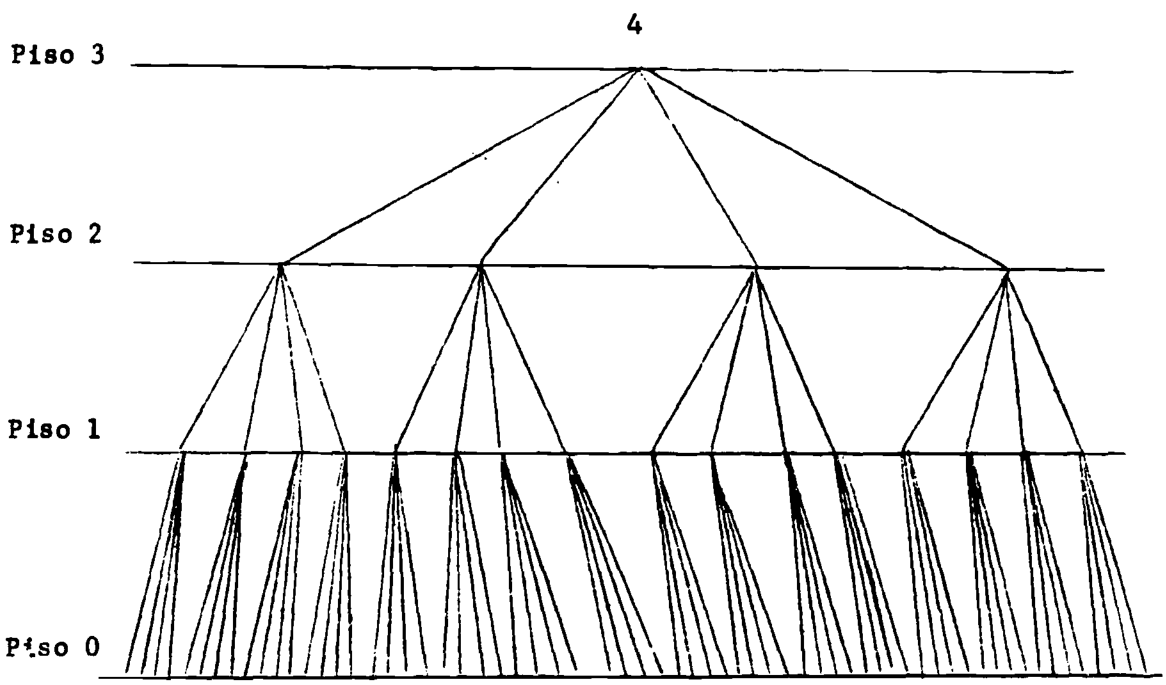


Figura 30

Qué tenemos dentro de una caja del piso 2 en el país del diez?

Para tener una caja en el piso uno, necesitamos 10 elementos y para tener una caja en el segundo piso necesitamos diez cajas de diez elementos, o sea en cada caja del segundo piso tenemos cien elementos. Si cien es 10^2, entonces podemos decir que 10^2 es el número de elementos que se encuentran en una caja del segundo piso en el país del diez.

Qué es 4^3? Es lo que hay en una caja del tercer piso en el "país de cuatro". Cuántos elementos tuvimos que subir del piso cero para obtener una caja del piso tercero?



Son 4 X 4 X 4 Entonces 4^3 es también 4 X 4 X 4

Figura 31

Qué es 10^{o} ? Estamos en el "país de diez". Qué se encuentra en una caja del piso cero? Según dijimos, en todos los países procedemos del mismo modo para llenar las cajas del piso cero puesto que siempre ponemos un elemento en cada caja. Entonces

$$10^{o} = 1$$

Ahora qué representa 4^{o} ? Es el número de elementos que hay en una caja en el piso cero en el "país de cuatro". Es decir encontramos también uno, esto es

$$4^{o} = 1$$

Qué es n^{o} si n representa

Qué es 10^0 ? Estamos en el "país de diez". Qué se encuentra en una caja del piso cero? Según dijimos, en todos los países procedemos del mismo modo para llenar las cajas del piso cero puesto que siempre ponemos un elemento en cada caja. Entonces

$$10^0 = 1$$

Ahora qué representa 4^0 ? Es el número de elementos que hay en una caja en el piso cero en el "país de cuatro". Es decir encontramos también uno, esto es

$$4^0 = 1$$

Qué es n^0, si n representa un entero natural superior a cero? Cómo vamos a proceder? Exactamente del mismo modo, colocando un elemento en cada caja del piso cero. Desde luego

$$n^0 = 1$$

Cómo escribir 1971 utilizando las potencias? Cuando escribimos 1971 queremos decir que, viviendo en el"país de diez", tenemos una caja en el piso tres o sea 1×10^3, nueve cajas en el piso dos o sea 9×10^2, siete cajas en el piso uno o sea 7×10^1 y una caja en el piso cero o sea 1×10^0 desde luego

$$1971 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

En el"país de cinco" se podría considerar

$$2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

Eso representa un número; cómo se escribe ese número en el "país de diez"? 339

Pocc a poco llegamos a los polinomios del tipo

$$a_n \; x^n + a_{n-1} \; x^{n-1} + \; - - - + \; a_o$$

en el caso particular siguiente:

x es un entero natural superior a uno

todos los coeficientes a_i son enteros inferiores a x (i varía de n a o).

EVALUACION DE LOS CONOCIMIENTOS ADQUIRIDOS: Completar el siguiente cuadro.

PAIS DE DOS	PAIS DE TRES	PAIS DE CINCO	PAIS DE DIEZ
10			
	10		
		10	
			10
			12
		20	
100			
	22		
		14	

Figura 32

ALGO DE LOGICA MATEMATICA

Construyamos dos conjuntos A y B, consideremos sobre cada uno de ellos la proposición: TODOS LOS CABALLEROS DEL CONJUNTO - LLEVAN SOMBRERO

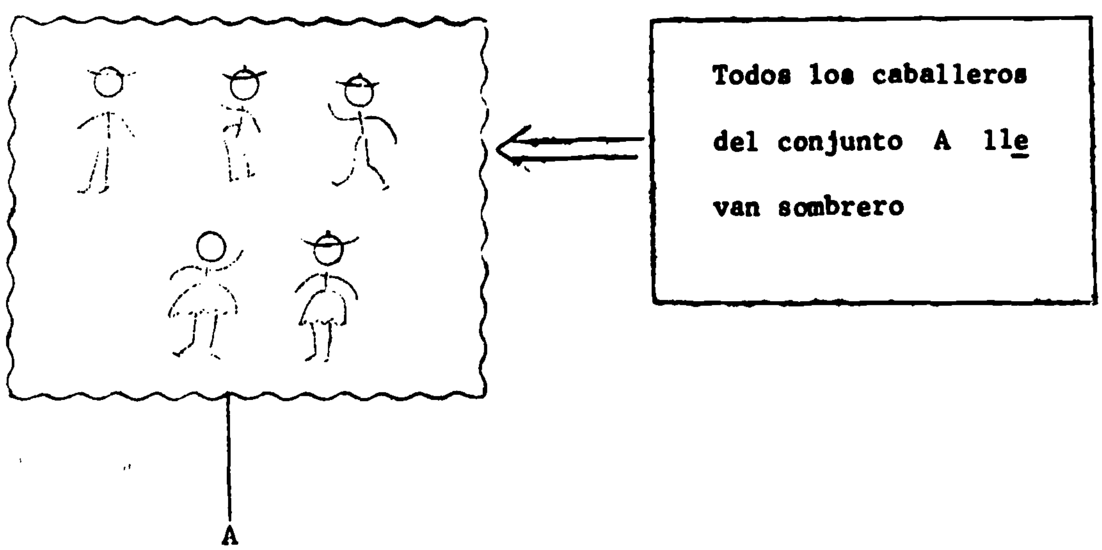
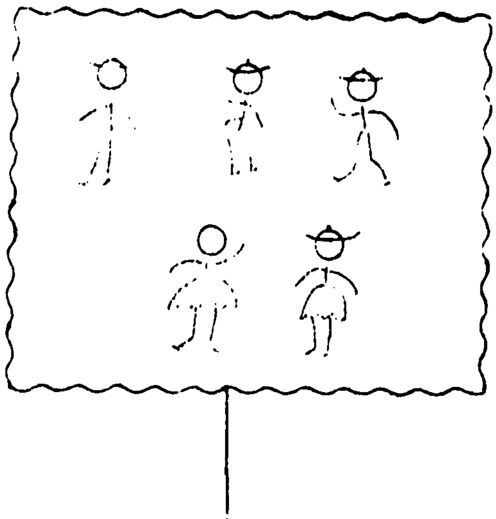


Figura 1

Estaremos de acuerdo al decir que esa proposición es verdadera,

Construyamos dos conjuntos A y B, consideremos sobre cada uno de ellos la proposición: TODOS LOS CABALLEROS DEL CONJUNTO - LLEVAN SOMBRERO



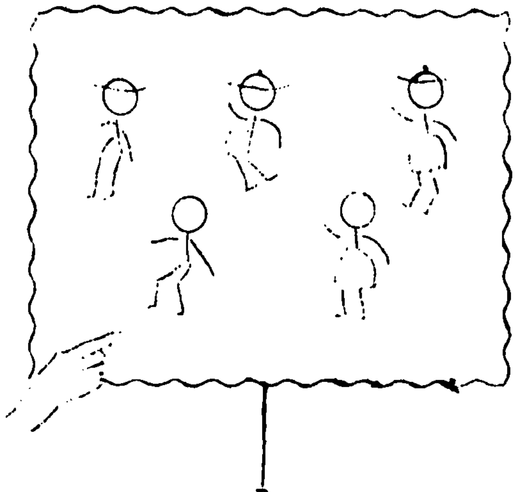
Todos los caballeros del conjunto A lle
van sombrero

A

Figura 1

Estaremos de acuerdo al decir que esa proposición es verdadera, puesto que no podemos indicar uno que no lleve sombrero

Ahora, si decimos



Todos los caballeros del conjunto B lle
van sombrero

B

Figura 2

Comprobamos que es falsa porque podemos señalar uno que no lleva sombrero. Pero SI NO SE PUEDE ENCONTRAR por lo menos -

40

UNO QUE NO CUMPLA LA CONDICION, entonces NO SE PUEDE DECIR QUE SEA FALSO; así por ejemplo en el conjunto C (Figura 3) tenemos:

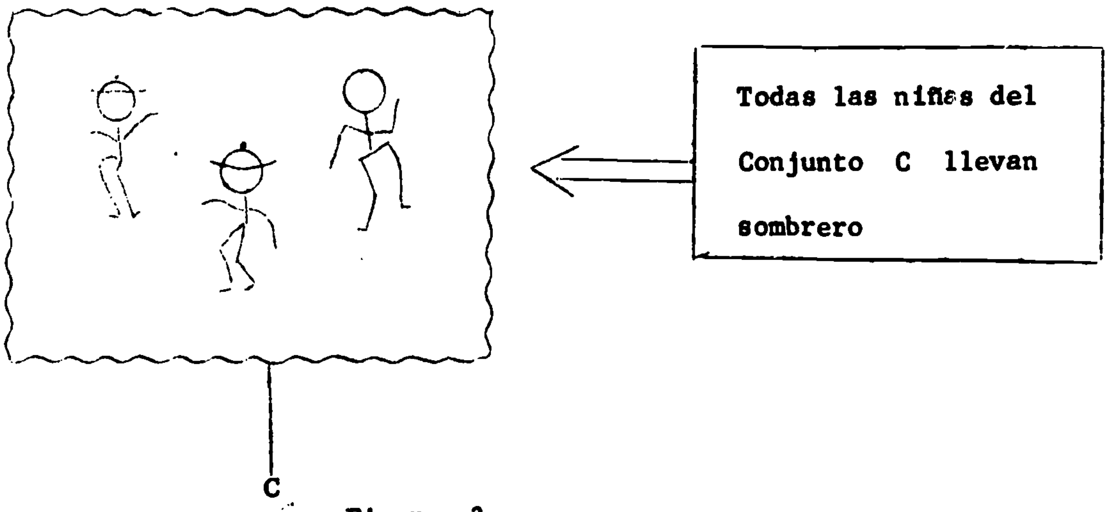
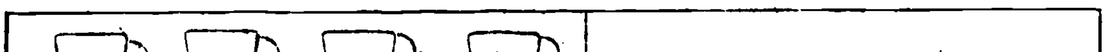


Figura 3

No se puede afirmar que sea falso porque no existe en C una niña que no lleve sombrero.

Consideremos ahora una proposición cualquiera, distingamos la de su negación y de su proposición contraria:



UNO QUE NO CUMPLA LA CONDICION, entonces NO SE PUEDE DECIR QUE SEA FALSO; así por ejemplo en el conjunto C (Figura 3) tenemos:

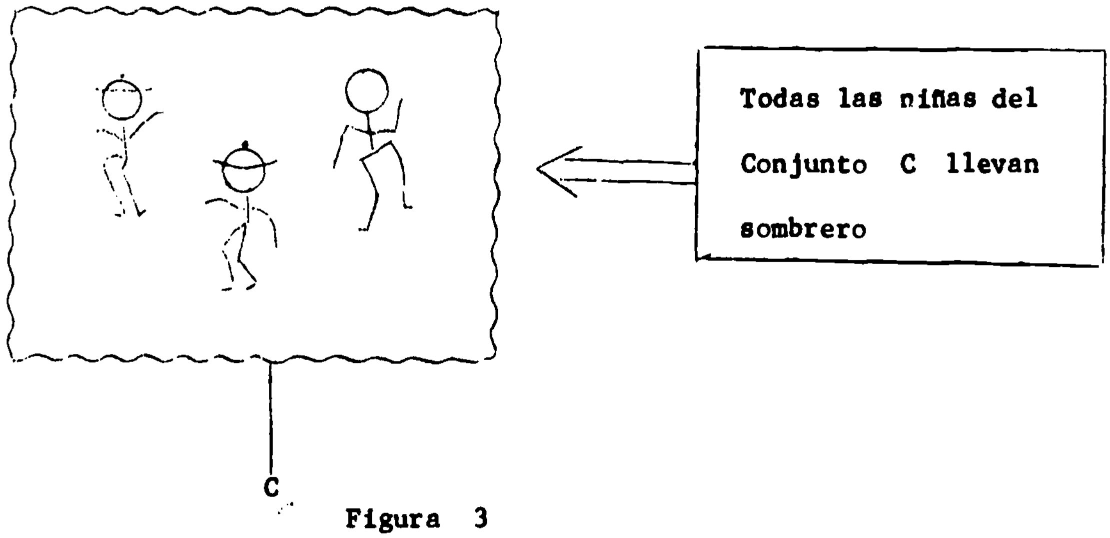


Figura 3

No se puede afirmar que sea falso porque no existe en C una niña que no lleve sombrero.

Consideremos ahora una proposición cualquiera, distingamos la de su negación y de su proposición contraria:

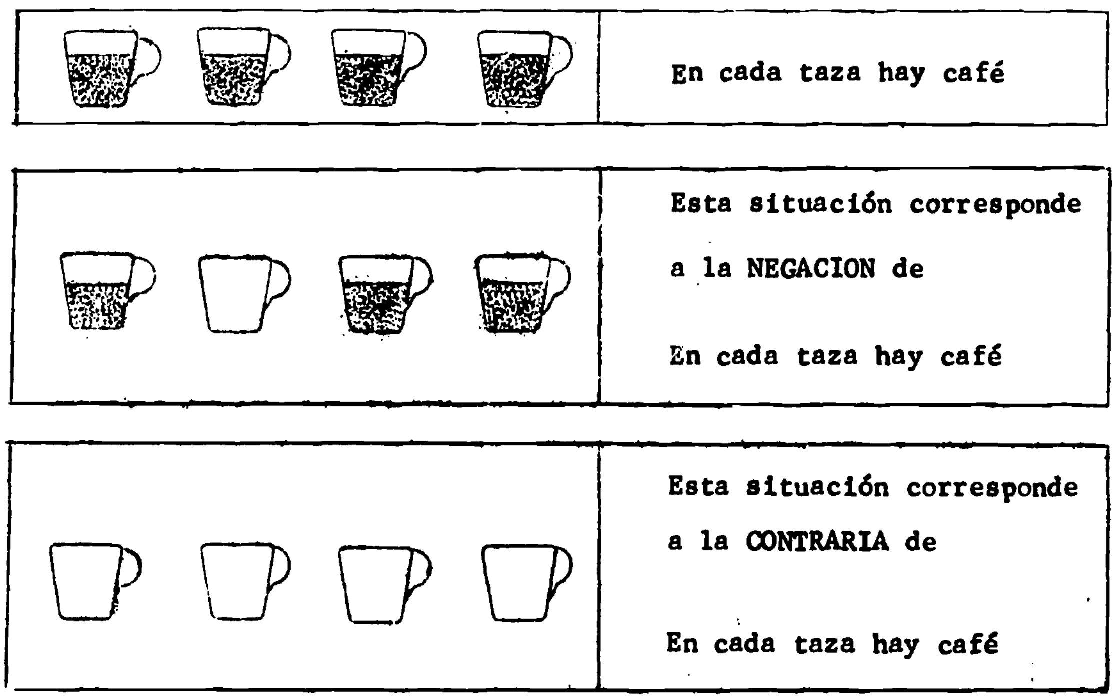
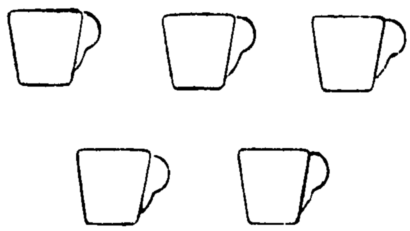
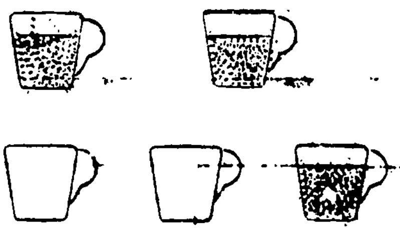


Figura 4

Representemos por el símbolo p la proposición "en cada taza hay café" y designemos como "no p" la negación de p y como "co p" lo contrario de p. Veamos si ellas con ciertas o falsas, colocando el resultado en un cuadro:



proposición	cierto	falso
p		X
no p	X	
co p	X	



proposición	cierto	falso
p		X
no p	X	
co p		X

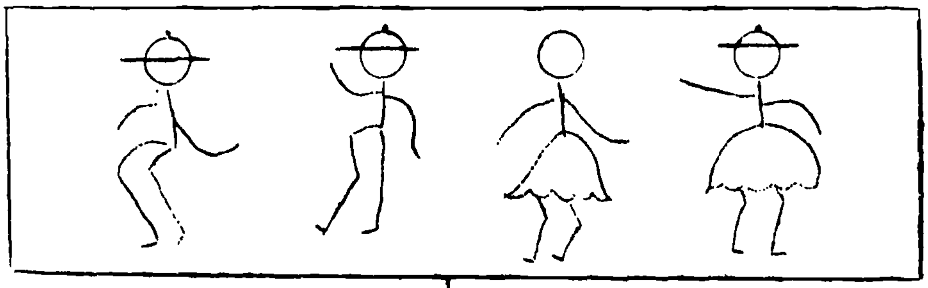
Figura 5

Conclusión:

Para que la NEGACION de una proposición sea cierta (o que la proposición sea falsa) es SUFICIENTE que haya UN elemento el cual no la cumpla.

Para que la CONTRARIA de una proposición sea verdadera es - NECESARIO y SUFICIENTE que TODOS los elementos no la cumplan.

Imaginemos esta nueva situación:



D

Figura 6

"Todos los caballeros del conjunto D llevan sombrero"

Luego:

S I [un elemento de este conjunto es un caballero] E N T O N C E S [ese elemento lleva un sombrero]

o, dicho de otra manera:

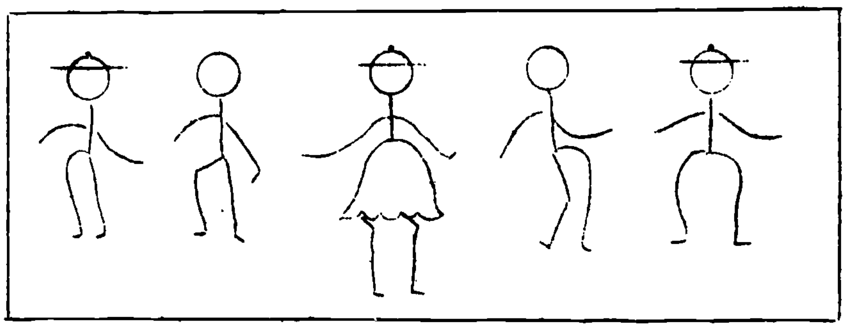
[ser caballero] I M P L I C A [llevar sombrero]

lo que escribimos

[ser caballero] $\Longrightarrow$ [llevar sombrero]

podemos afirmar que esa proposición es cierta en el conjunto anterior pero no lo es en cualquier conjunto.

En el conjunto E existe un caballero que no lleva sombrero ("existe un" se debe entender como "existe <u>por lo menos</u> un" lo que a veces se representa por el símbolo $\exists$) entonces, en ese caso



E

Figura 7

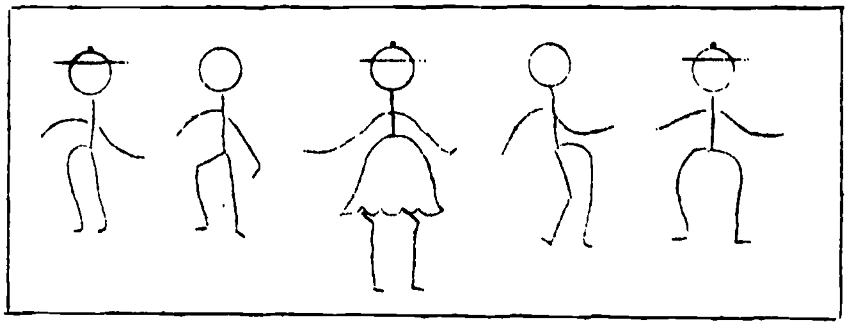
ser caballero $\not\Longrightarrow$ llevar sombrero

pero, en ese mismo conjunto E se puede afirmar:

no llevar sombrero $\Longrightarrow$ ser caballero

pues todos los que no llevan sombreros son caballeros, o no se pue de encontrar ningún elemento que tenga las dos propiedades:

En el conjunto E existe un caballero que no lleva sombrero ("existe un" se debe entender como "existe por lo menos un" lo que a veces se representa por el símbolo $\exists$) entonces, en ese caso



E

Figura 7

ser caballero $\not\Longrightarrow$ llevar sombrero

pero, en ese mismo conjunto E se puede afirmar:

no llevar sombrero $\Longrightarrow$ ser caballero

pues todos los que no llevan sombreros son caballeros, o no se pue de encontrar ningún elemento que tenga las dos propiedades:

no llevar sombrero y no ser caballero

Pero:

ser caballero $\not\Longrightarrow$ no llevar sombrero

pues se puede encontrar un elemento que presente las dos propiedades:

ser caballero y llevar sombrero

Otra IMPLICACION cierta en el conjunto E:

$$\boxed{\text{ser dama}} \Longrightarrow \boxed{\text{llevar sombrero}}$$

Pero la IMPLICACION RECIPROCA (que se obtiene cambiando de posición las propiedades) es falsa

$$\boxed{\text{llevar sombrero}} \not\Longrightarrow \boxed{\text{ser dama}}$$

pues existe un elemento que lleva sombrero y no es dama.

Consideramos ahora el REFERENCIAL F

Otra IMPLICACION cierta en el conjunto E:

ser dama $\Longrightarrow$ llevar sombrero

Pero la IMPLICACION RECIPROCA (que se obtiene cambiando de posición las propiedades) es falsa

llevar sombrero $\not\Longrightarrow$ ser dama

pues existe un elemento que lleva sombrero y no es dama.

Consideramos ahora el REFERENCIAL F

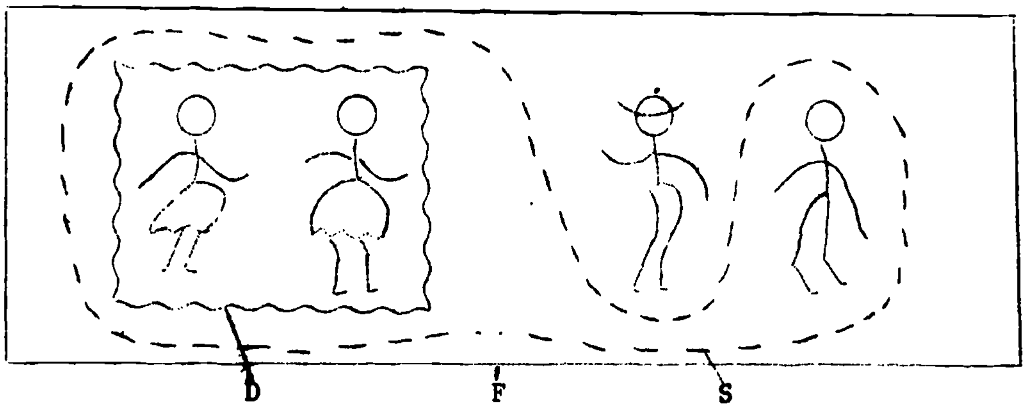


Figura 8

Podemos afirmar:

ser Dama $\Longrightarrow$ no llevar Sombrero

El conjunto de las <u>damas</u> ES UN SUBCONJUNTO de las personas que no <u>llevan sombrero</u>

<u>Pero</u>:

no llevar sombrero $\not\Longrightarrow$ ser dama

El conjunto de las personas que no llevan sombrero NO ES UN SUBCONJUNTO del conjunto de las damas.

$$\boxed{\text{llevar sombrero}} \Longrightarrow \boxed{\text{ser caballero}}$$

El conjunto de las personas que llevan sombrero ES UN SUBCONJUNTO del conjunto de los caballeros (por no tener sino un elemento ese conjunto se llama CONJUNTO UNITARIO).

Pero se puede también decir que:

El conjunto de los caballeros NO ES UN SUBCONJUNTO del conjunto de las personas que llevan sombrero y

$$\boxed{\text{ser caballero}} \not\Longrightarrow \boxed{\text{llevar sombrero}}$$

Aparece entonces una relación entre la noción de subconjunto y la noción de implicación.

De una manera general sea el conjunto F; designemos como F (p) el subconjunto de los elementos de F que tienen la propiedad p; de la misma manera designemos como F (q) el subconjunto de los elementos que tienen la propiedad q.

Por ejemplo: p = ser dama

q = no llevar sombrero

Para estas condiciones, de la Gráfica 8 tenemos que: F (p) es el subconjunto llamado D de las damas del conjunto F.

F (q) es el subconjunto de los elementos de F que no llevan sombrero, designado por la letra S.

Si F (p) es un SUBCONJUNTO de F (q), diremos que $p \Longrightarrow q$

OJO! Esto no es una definición de la implicación, pues existen implicaciones de otro tipo. Por ejemplo: si llueve ENTONCES llevo mi paraguas.

$\boxed{\text{Llueve}} \Longrightarrow \boxed{\text{Llevo mi paraguas}}$

Desde luego si en un parqueadero el conjunto de los carros blancos es un subconjunto de los carros Ford, entonces podremos decir que,

Para estas condiciones, de la Gráfica 8 tenemos que: F (p) es el subconjunto llamado D de las damas del conjunto F.

F (q) es el subconjunto de los elementos de F que no llevan sombrero, designado por la letra S.

Si F (p) es un SUBCONJUNTO de F (q), diremos que $p \Longrightarrow q$

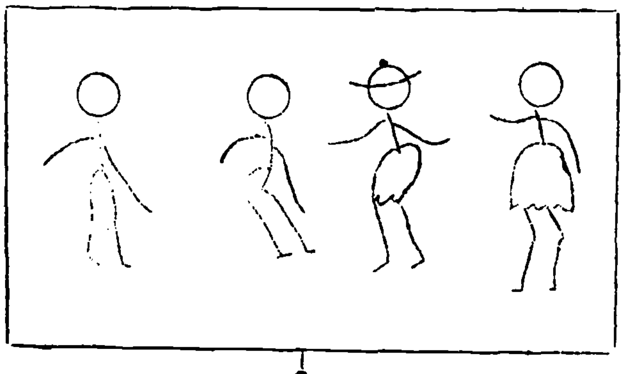
OJO! Esto no es una definición de la implicación, pues existen implicaciones de otro tipo. Por ejemplo: si llueve ENTONCES llevo mi paraguas.

$\boxed{\text{Llueve}} \Longrightarrow \boxed{\text{Llevo mi paraguas}}$

Desde luego si en un parqueadero el conjunto de los carros blancos es un subconjunto de los carros Ford, entonces podremos decir que, <u>en el conjunto de carros de dicho parqueadero</u>

$\boxed{\text{blanco}} \Longrightarrow \boxed{\text{Ford}}$

Hacia el absurdo?



G

Figura 9

Considermaos la propiedad q: "no llevar sombrero"; G (q) es un subconjunto de G; G (q) tiene tres elementos.

Consideramos la propiedad r: "ser caballero", G (r) es un subconjunto de G: G (r) tiene 2 elementos.

A una propiedad siempre le corresponde un conjunto.

Consideremos la propiedad s: "ser animal" diremos también que G (s) , o sea el conjunto de los elementos de G que tiene la propiedad de ser animales es un SUBCONJUNTO de G; ocurre en este caso que G (S) no tiene ningún elemento, es el conjunto VACIO que representamos por $\emptyset$.

Procediendo de esa manera se podrá siempre considerar el conjunto vacío como subconjunto de cualquier conjunto. Ejemplo: Sea el conjunto P de los enteros pares. El conjunto vacío es un subconjunto de P (lo que escribiremos $\emptyset \subset P$). En efecto, el conjunto de los elementos de P que no son múltiplos de dos es un subconjunto de P

Consideramos la propiedad r: "ser caballero", G (r) es un subconjunto de G: G(r) tiene 2 elementos.

A una propiedad siempre le corresponde un conjunto.

Consideremos la propiedad s: "ser animal" diremos también que G (s), o sea el conjunto de los elementos de G que tiene la propiedad de ser animales es un SUBCONJUNTO de G; ocurre en este caso que G (S) no tiene ningún elemento, es el conjunto VACIO que representamos por $\emptyset$.

Procediendo de esa manera se podrá siempre considerar el conjunto vacío como subconjunto de cualquier conjunto. Ejemplo: Sea el conjunto P de los enteros pares. El conjunto vacío es un subconjunto de P (lo que escribiremos $\emptyset \subset P$). En efecto, el conjunto de los elementos de P que no son múltiplos de dos es un subconjunto de P pero como resulta que todos los números pares son múltiplos de dos, entonces el conjunto de los elementos de P que no son múltiplos de dos, es el conjunto vacío; conclusión: $\emptyset \subset P$

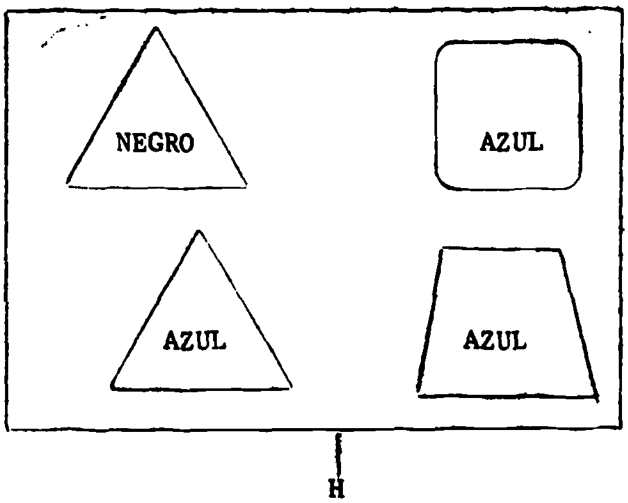


Figura 10

Sea H un conjunto de figuras. H es nuestro referencial. En ese conjunto las figuras están pintadas de un solo fondo.

Sea H (d) el subconjunto de los discos de H. Es evidente que H (d) es un conjunto vacío:

$$H(d) = \emptyset$$

Pero, según lo dicho anteriormente, como H (d) es el conjunto vacío, H (d) se puede considerar también como subconjunto de H (a) subconjunto de los elementos de H que son azules.

$$H(d) \subset H(a)$$

Desde luego $\boxed{\text{disco}} \Rightarrow \boxed{\text{azul}}$

(Es cierto que no se puede encontrar en el conjunto H un disco que no sea azul).

Por otra parte, si se designa por H (n) el subconjunto de los elementos de H que son negros, se puede decir también que el subconjunto H (d) de los discos de H es un subconjunto de H (n) pues, según lo visto anteriormente, H (d) es vacío y el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

$$H(d) \subset H(n)$$

Desde luego

$$\boxed{\text{disco}} \Rightarrow \boxed{\text{negro}}$$

(Es cierto que no se puede encontrar en el conjunto H un disco que no sea negro).

Pero si consideramos las dos implicaciones:

$$\boxed{\text{disco}} \Longrightarrow \boxed{\text{azul}}$$

$$\boxed{\text{disco}} \Longrightarrow \boxed{\text{negro}}$$

Podemos notar que tenemos a la vez

$$\boxed{\text{disco}} \Longrightarrow \boxed{\text{azul}}$$

y

$$\boxed{\text{disco}} \Longrightarrow \boxed{\text{no azul}}$$

Pues si un elemento es negro no es azul.

Llegamos entonces en la situación en que un elemento a la vez tiene una propiedad y no la tiene; eso no se puede sino en el caso de que el conjunto de tales elementos sea el conjunto vacío.

Si un conjunto E no es vacío, y consideramos cierta propiedad p admitiremos en matemática que no hay sino dos posibilidades para cualquier elemento de E:

O ese elemento cumple con p

O ese elemento no cumple con p

Para probar que un conjunto es vacío se podría entonces probar que sus elementos cumplen a la vez con una propiedad y con la negación de la misma.

UNOS EJERCICIOS

1 Consideremos la proposición p_1 siguiente:

Todos los elefantes de los llanos colombianos son verdes

Es cierto o falso?

Es cierto porque en los llanos colombianos no se puede encontrar ningún elefante verde.

2 Consideremos la proposición p_2

UNOS EJERCICIOS

1 Consideremos la proposición p_1 siguiente:

> Todos los elefantes de los llanos colombianos son verdes

<u>Es cierto o falso?</u>

Es cierto porque en los llanos colombianos no se puede encontrar ningún elefante verde.

2 Consideremos la proposición p_2

> Todos los elefantes de los llanos colombianos no son verdes

<u>Es cierto o falso?</u>

Es cierto porque en los llanos colombianos no se puede encontrar ningún elefante no verde.

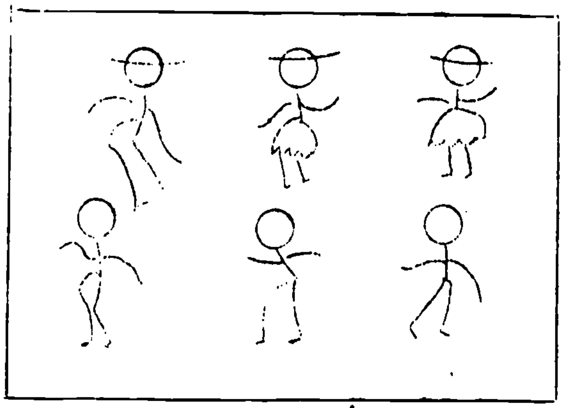
3 Si a un extranjero que no sabe nada de Colombia pero sabe lógica Matemática se le dice:

> las proposiciones p_1 y p_2 son ciertas

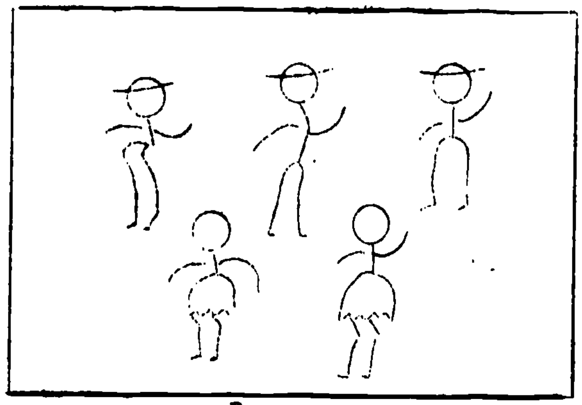
<u>Qué puede concluír este extranjero?</u>

El conjunto de elefantes es tal que sus elementos cumplen a la vez con una propiedad y su negación; entonces ese conjunto es vacío, de tal manera que se puede concluír: en los llanos colombianos no vive ningún elefante.

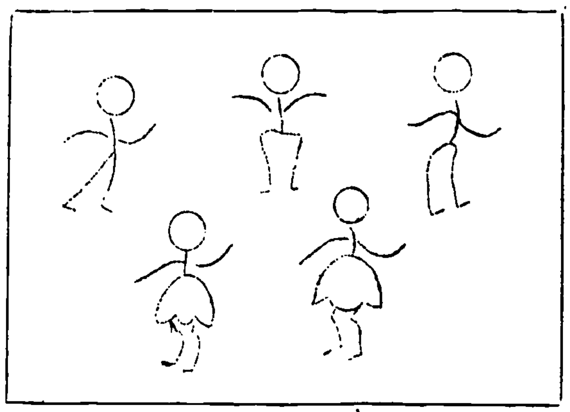
4 Consideremos las siguientes situaciones:



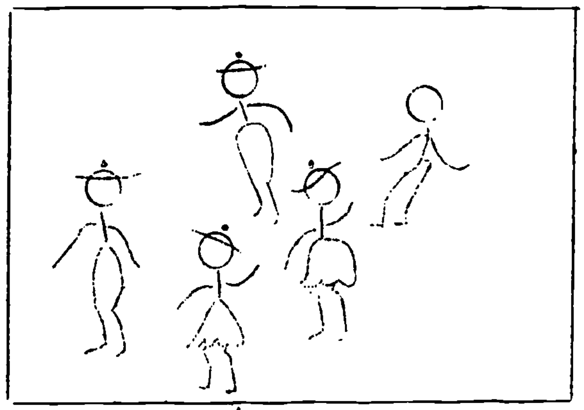
A



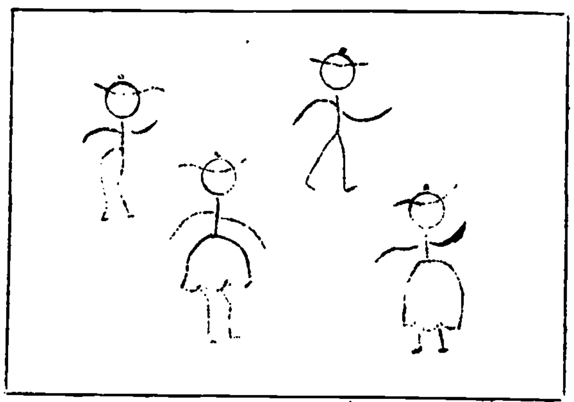
B



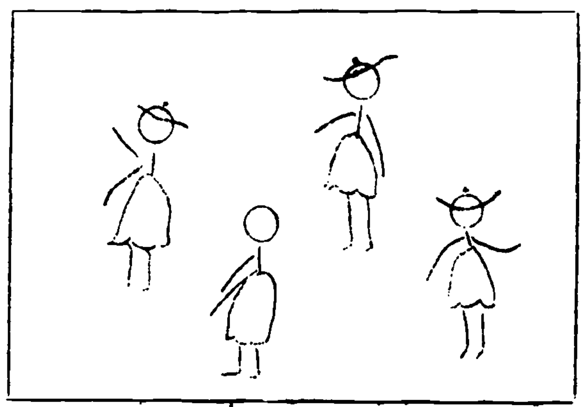
C



D



E



F

Analicemos en cuáles conjuntos las siguientes proposiciones, son ciertas.

Proposición "p"	Todas las personas llevan sombrero	
conjuntos		1

proposición "no p"	N E G A C I O N D E Todas las personas llevan sombrero	
conjuntos		5

proposición " co p"	L O C O N T R A R I O D E Todas las personas llevan

Analicemos en cuáles conjuntos las siguientes proposiciones, son ciertas.

Proposición "p"	Todas las personas llevan sombrero	
conjuntos		1

proposición "no p"	N E G A C I O N D E Todas las personas llevan sombrero	
conjuntos		5

proposición " co p"	L O C O N T R A R I O D E Todas las personas llevan sombrero	
conjuntos		1

proposición q:	TODAS LAS NIÑAS LLEVAN SOMBRERO	
q cierta en los conjuntos		3
la proposición "no q" es cierta en los conjuntos		3
la proposición "co q" es cierta en los conjuntos		2

proposición 2: TODOS LOS NIÑOS LLEVAN SOMBRERO		
r cierta en los conjuntos		3
la proposición "no r" es cierta en los conjuntos		4
la proposición "co r" es cierta en los conjuntos		2

proposición 2: TODOS LOS NIÑOS LLEVAN SOMBRERO		
r cierta en los conjuntos		3
la proposición "no r" es cierta en los conjuntos		4
la proposición "co r" es cierta en los conjuntos		2

Para cuáles conjuntos:

			conjuntos	
ser niña	⇒	llevar sombrero		3
llevar sombrero	⇒	ser niña		2
ser niño	⇒	llevar sombrero		3
llevar sombrero	⇒	ser niño		2
no ser niña	⇒	llevar sombrero		3
no llevar sombrero	⇒	ser niño		3
no llevar sombrero	⇒	ser niña		2